Thème : suites

L'exercice

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2 + 1. \end{cases}$$

Étudier la monotonie de cette suite.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

Je note P_n *: «* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *»* $(n \in \mathbb{N})$.
Supposons P_n *vraie pour tout* n*. On a donc :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_n \\ {u_{n+1}}^2 &\leqslant u_n^2 \\ \frac{1}{4}{u_{n+1}}^2 &\leqslant \frac{1}{4}u_n^2 \\ \frac{1}{4}{u_{n+1}}^2 + 1 &\leqslant \frac{1}{4}u_n^2 + 1 \\ u_{n+2} &\leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} *est vraie.*

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite est donc décroissante.

Élève 2

Avec un tableur, j'ai affiché les 400 *premiers termes de la suite : elle est croissante, on dirait qu'elle a pour limite* 2*, mais elle n'y va pas très vite !*

Élève 3

Sur $\mathbb{R}^+$*, la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ *est croissante car sa dérivée est positive.*
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$*, la suite* (u_n) *est croissante.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves selon les trois compétences chercher, raisonner et communiquer.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins fait appel à un algorithme. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



Thème : algorithmique et programmation

L'exercice

1 – Pour réaliser la figure ci-dessus, on a défini un motif en forme de losange et on a utilisé l'un des deux programmes A et B ci-contre.
Déterminer lequel et indiquer par une figure à main levée le résultat que l'on obtiendrait avec l'autre programme.

```
définir Motif
stylo en position d'écriture
avancer de 40
tourner ↺ de 45 degrés
avancer de 40
tourner ↺ de 135 degrés
avancer de 40
tourner ↺ de 45 degrés
avancer de 40
tourner ↺ de 135 degrés
relever le stylo
```

Programme A

```
quand [drapeau] est cliqué
cacher
effacer tout
mettre la taille du stylo 1
aller à x: -230 y: 0
s'orienter à 90 degrés
répéter 8 fois
    Motif
    avancer de 55
```

Programme B

```
quand espace est pressé
cacher
effacer tout
mettre la taille du stylo 1
aller à x: 0 y: 0
s'orienter à 90 degrés
répéter 8 fois
    Motif
    tourner ↺ de 45 degrés
```

2 – Combien mesure l'espace entre deux motifs successifs ?

3 – On souhaite réaliser la figure ci-dessous :



Pour ce faire, on envisage d'insérer l'instruction `ajouter 1 à la taille du stylo` dans le programme utilisé à la question 1. Où faut-il insérer cette instruction ?

éduscol - sujets zéro DNB à compter de la session 2017

Extrait du document ressource algorithmique et programmation, cycle 4

Compétences développées

Cet enseignement a pour objectif de développer chez les élèves les compétences suivantes :

- ***décomposition*** *: analyser un problème compliqué, le découper en sous-problèmes, en sous-tâches ;*
- ***reconnaissance de schémas*** *: reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions, mettre en évidence des interactions ;*
- ***généralisation et abstraction*** *: repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles, traduire les schémas récurrents en boucles, concevoir des méthodes liées à des objets qui traduisent le comportement attendu ;*
- ***conception d'algorithme*** *: écrire des solutions modulaires à un problème donné, réutiliser des algorithmes déjà programmés, programmer des instructions déclenchées par des événements, concevoir des algorithmes se déroulant en parallèle.*

Les modalités de l'apprentissage correspondant peuvent être variées : travail en mode débranché, c'est-à-dire sans utilisation d'un dispositif informatique, individuel ou en groupe, en salle informatique ou en salle banale, sur tablette ou sur ordinateur.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Indiquez en quoi cet exercice permet de mettre en valeur les compétences décrites dans l'extrait du document ressource, cycle 4.

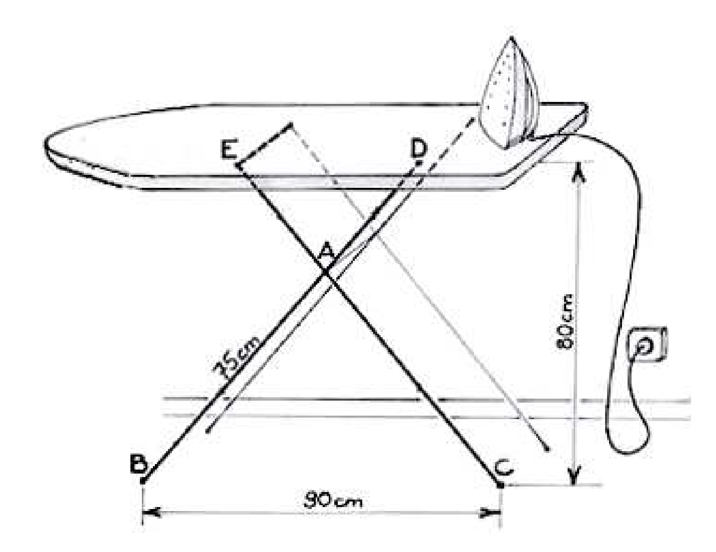
2 – Proposez une correction complète de cet exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de collège de cycle 4.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *algorithmique et programmation*, dont l'un au moins au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Par un mercredi pluvieux, le petit Nicolas a décidé de repasser pour faire une surprise à ses parents.
Il utilise la table à repasser représentée ci-dessous.



Les tiges $[EC]$ et $[BD]$ de même longueur constante sont articulées en A. La longueur AB est égale à 75 cm. Sous la table, le point D est fixe et le point E peut être déplacé pour ajuster la hauteur. On sait que lorsque BC est égale à 90 cm, la table a une hauteur de 80 cm et est parallèle au sol pour cet écartement.

1 – Nicolas voudrait comprendre pourquoi la planche à repasser reste parallèle au sol quelle que soit sa hauteur. Comment pourrais-tu lui expliquer ?

2 – Comme Nicolas est plus petit que ses parents, il règle la table pour que la hauteur soit de 60 cm. Calculer alors l'écartement BC.

Les réponses de deux élèves de cycle 4 à la question 1

Élève 1

J'ai réalisé une figure avec un logiciel de géométrie.
Lorsque je déplace le point E la table reste parallèle à (BC).
J'ai aussi observé que les triangles AED et ABC sont toujours isocèles mais je ne sais pas comment le démontrer.

Élève 2

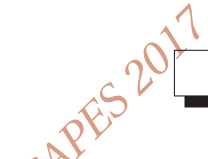
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ *car les branches $[EC]$ et $[BD]$ sont de même longueur.*
D'après le théorème de Thalès, $[ED]$ et $[BC]$ sont parallèles.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la réponse des deux élèves en mettant en évidence la pertinence de leurs démarches et en précisant les aides que vous pourriez leur apporter.

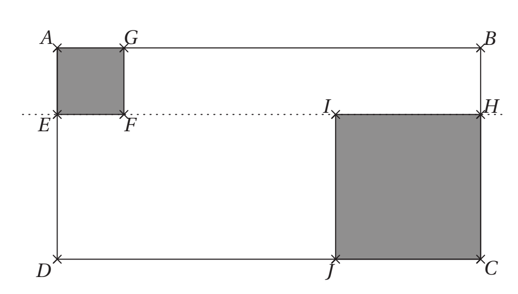
2 – En prenant appui sur les productions des élèves, proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Présentez deux exercices sur le thème *géométrie plane*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous prendrez soin de motiver vos choix.



Thème : problèmes conduisant à l'étude d'une fonction

L'exercice



Sur une parcelle rectangulaire $ABCD$ de 4 mètres par 8 mètres, on veut délimiter deux parterres de fleurs carrés, dans deux coins opposés ($AEFG$ et $CHIJ$, sur le schéma ci-contre) et avec E, F, I et H alignés.

Comment faut-il construire ces deux carrés pour que l'aire de la zone restante soit maximale ?

Extrait du document « Les compétences mathématiques au lycée »

La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs :

- *l'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures ;*
- *le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur...) et de compétences spécifiques aux mathématiques :*

Chercher[...], ***Modéliser***[...], ***Représenter***[...], ***Calculer***[...], ***Raisonner***[...], ***Communiquer***[...].

Cadre de mise en œuvre
La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. En effet, ceux-ci facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes nécessite la mise en œuvre directe, sur des exercices aux objectifs circonscrits, de procédures de base liées à chacune de ces compétences. Il n'y a pas d'ordre chronologique imposé entre l'entraînement sur des exercices et la résolution de problèmes. Cette dernière peut en effet révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi un tel exercice répond aux objectifs mentionnés dans le document « Les compétences mathématiques au lycée ».

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde. Vous mettrez en évidence ce que peut apporter l'utilisation d'outils logiciels.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes conduisant à l'étude d'une fonction*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : optimisation

L'exercice

Le directeur d'une salle de spectacle de 8 000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser le montant de sa recette. Une étude de marché lui apprend que :

- ▷ si le prix du billet est de 50 €, il vend 3 000 billets ;
- ▷ chaque baisse de 1 € lui permet de vendre 170 billets supplémentaires.

Déterminer le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

Sans aucune baisse la recette s'élève à 150 000 €.
Si je fais 5 *baisses, le prix du billet est de* 45 €, *le nombre de billets vendus est de* 3 850,
la recette fait 173 250 €.
Si je fais 10 *baisses le prix du billet est de* 40 €, *le nombre de billets vendus est de* 4 700,
la recette fait 188 000 €.
Si je fais 20 *baisses le prix du billet est de* 30 € *le nombre de billets vendus est de* 6 400,
la recette fait 192 000 €.
Plus on fait de baisses, plus la recette augmente mais la salle contient 8 000 *places.*
Comme $\dfrac{8\,000-3\,000}{170}=29{,}41$ *on peut faire* 29 *baisses.*
Le prix le plus intéressant est donc 21€.

Élève 2

J'ai utilisé ma calculatrice.
J'ai tracé $y=(50-x)(3\,000+170x)$ *et j'ai demandé le maximum.*
J'obtiens $x=16{,}176\,470\,588$ *et* $y=194\,485{,}294\,11$.
Il faut donc vendre le billet à 16,18 € *environ.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les démarches de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*, dont l'un au moins illustrera l'apport d'un logiciel dans sa résolution. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : probabilités

L'exercice

Un restaurateur prépare chaque jour trente crèmes catalanes pour soixante-dix couverts.
Le restaurateur affirme : « *En moyenne deux clients sur cinq choisissent une crème catalane en dessert donc je pense que dans plus de* 70% *des cas j'aurai assez de crèmes catalanes* ».
A-t-il raison ?

Les réponses de deux élèves de première scientifique

Élève 1

J'ai reconnu la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ *avec* $n=70$, $p=0{,}4$ *et* $k=30$.
La probabilité est donc environ 0,085.
Donc le restaurateur a tort, il satisfait seulement 8,5% *de la demande. Cela me semble peu.*

Élève 2

J'ai écrit un algorithme qui calcule le nombre de crèmes catalanes commandées par les soixante-dix clients puis je l'ai répété mille fois pour avoir une moyenne :

```
pour I variant de 1 à 1000 faire
    pour J variant de 1 à 70 faire
        Affecter à aléa une valeur choisie au hasard parmi 1, 2, 3, 4 ou 5.
        si aléa < 3 alors
            C prend la valeur C + 1
        fin
    fin
fin
M prend la valeur C/1000
Afficher M
```

J'ai lancé 3 *fois l'algorithme et j'ai trouvé* 27,9 ; 28,1 *et* 28. *En moyenne* 28 *crèmes catalanes sont commandées par les* 70 *clients donc ils seront tous satisfaits.*

Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.
2. En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.
3. En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents.

Thème : géométrie de l'espace

L'exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère, pour tout entier naturel n, les points suivants définis par leurs coordonnées :

$$A(n\,;4\,;0) \qquad B(-n\,;0\,;0) \qquad C(-n\,;4\,;3) \qquad D(n\,;0\,;-3)$$

Démontrer que, quelle que soit la valeur de l'entier naturel n, les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Extrait du programme de mathématiques, classe terminale de la série scientifique

Géométrie dans l'espace

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.

La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire.

Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique. Le concept d'orthogonalité, une fois exprimé en termes de coordonnées dans un repère orthonormé, fournit un outil pour une caractérisation simple des plans de l'espace.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Indiquez en quoi cet exercice répond aux attentes mentionnées dans l'extrait du programme de terminale scientifique. Mettez en évidence deux compétences particulièrement mobilisées dans cet exercice.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *géométrie de l'espace*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



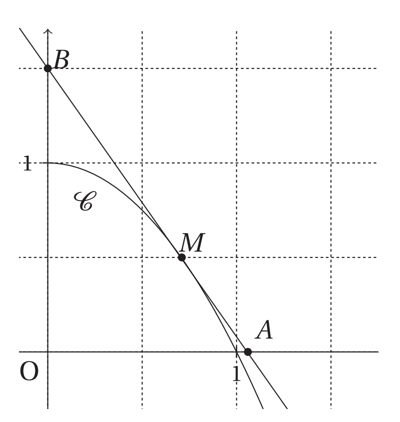
Thème : optimisation

L'exercice

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x^2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M de coordonnées $(a\,;f(a))$, avec $0 < a \leqslant 1$, coupe l'axe (Ox) en A et l'axe (Oy) en B.



Existe-t-il une position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ rendant l'aire du triangle MBO maximale ?

Les démarches de trois élèves de première scientifique

Élève 1

Dans un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la courbe représentative de la fonction f.
J'ai créé un curseur de 0 à 1 puis placé le point M de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$.
J'ai ensuite tracé la tangente en M puis créé le triangle OBM.
En faisant varier le curseur je constate que l'aire du triangle est maximale lorsque M est en A.

Élève 2

L'aire d'un triangle est égale à la moitié de la base multipliée par la hauteur.
Dans le triangle MBO, la hauteur associée à la base OB est maximale lorsque M a pour abscisse 1.
L'aire du triangle OBM est donc maximale pour $a = 1$ et vaut alors $\frac{1}{2} \times 1 \times 1{,}5 = 0{,}75$.

Élève 3

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
On a $f(a) = 1 - a^2$ et $f'(a) = -2a$ ce qui donne $y = -2ax + 2a^2$.
Pour $a = 1$, on obtient $y = -2x + 2$. Le point B a donc pour ordonnée 2.
Le triangle MBO a pour aire $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, ce qui représente son aire maximale.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chacun de ces élèves en précisant les compétences mises en jeu et en indiquant comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.

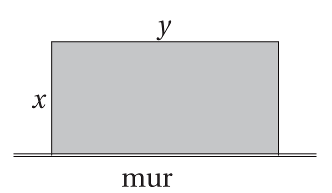
2 – Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Présentez deux exercices sur le thème *optimisation*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : optimisation

L'exercice

Pour respecter une densité maximale labellisée de 6 poules au m^2,
un éleveur construit avec du grillage un enclos rectangulaire d'aire 1 250 m^2.
Ce terrain est limité par un mur sur lequel il n'y a pas de grillage.
On désigne par x et y les dimensions de l'enclos.



Déterminer les dimensions x et y de l'enclos pour que la longueur du grillage utilisé soit minimale.

Les réponses proposées par trois élèves de seconde

Élève 1

1 250 n'est pas divisible par 6. L'éleveur doit choisir un enclos de 1 248 m^2 ou de 1 254 m^2.
La figure optimale pour un rectangle est un carré donc la longueur du grillage utilisé est minimale lorsque l'on a $x = y = \sqrt{1\,248}$ ou lorsque l'on a $x = y = \sqrt{1\,254}$.

Élève 2

J'ai trouvé que la longueur du grillage utilisé en fonction de x est $2x + \dfrac{1\,250}{x}$.
En traçant à la calculatrice la courbe de cette fonction, j'ai vu qu'elle était décroissante avant $x = 25$ et croissante après $x = 25$.
Donc la longueur est minimale pour $x = 25$.

Élève 3

J'ai essayé avec un tableur.

La longueur de grillage est minimale lorsque $x = 25$ et $y = 50$.

	A	B	C
1	x	$y = 1250/x$	$2x + y$
2	20	62,5	102,5
3	21	59,524	101,524
4	22	56,818	100,818
5	23	54,348	100,348
6	24	52,083	100,083
7	25	50	100
8	26	48,077	100,077
9	27	46,296	100,296
10	28	44,643	100,643

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les démarches de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *optimisation* au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



Thème : grandeurs et mesures

L'exercice



Un sablier de hauteur totale 12 cm est constitué de deux cônes de révolution identiques.
La diamètre de chaque base est 5 cm.
Au départ, la hauteur du sable est de 3 cm dans le cône du haut.
Le sable s'écoule régulièrement à raison de 1,6 cm^3 par minute.
Dans combien de temps la totalité du sable sera-t-elle passée dans le cône du bas ?
Donner une valeur approchée à la seconde près.

Exercice issu du manuel Transmaths Cycle 4, 2016

Extraits du programme de mathématiques du cycle 4

Extrait 1 : préambule pour le cycle 4

La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer[. . .].
Pour ce faire, une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines. Le programme fournit des outils permettant de modéliser des situations variées sous forme de problèmes mathématisés.

Extrait 2 : grandeurs et mesures

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées
Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités.
Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.

- *Notion de grandeur produit et de grandeur quotient*
- *Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Indiquez en quoi cet exercice répond aux attentes mentionnées dans les extraits de programme. Vous préciserez les compétences mathématiques qui peuvent être mises en œuvre dans cet exercice.

2 – Proposez une correction de cet exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de troisième.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0$.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

Les démarches de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,000
3	1	0,500
4	2	0,667
5	3	0,750
6	4	0,800
7	5	0,833
…	…	…
102	100	0,990
…	…	…
1 002	1 000	0,999

À l'aide d'un tableur, j'ai construit cette feuille de calcul.
Je conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.
Je montre que la suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n}$$

Je ne sais pas comment conclure.

Élève 2

J'ai calculé les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{2}{3},\ u_3 = \frac{3}{4}.$$

J'en déduis que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et donc que la suite (u_n) converge vers 1 car $u_{10\,000} = \dfrac{10\,000}{10\,001} \approx 1$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Précisez l'aide que vous pourriez leur apporter pour mener à bien leur démarche.

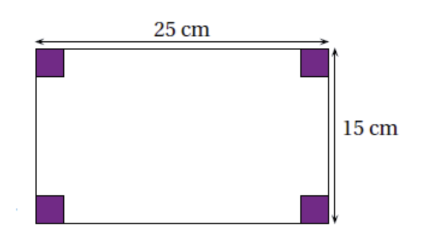
2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique en ayant recours à l'outil logiciel.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

Thème : problèmes conduisant à une modélisation par des fonctions

L'exercice

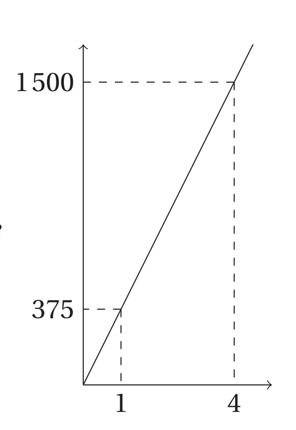
On dispose d'une feuille rectangulaire cartonnée de 25 cm de long et de 15 cm de large.
Pour former une boîte par pliage, on enlève dans chaque angle un carré de même côté.
Déterminer une valeur approchée du volume maximum de cette boîte.



Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

J'ai posé x le côté du carré et j'ai tracé la courbe $V(x)$ sur le logiciel.
J'ai trouvé qu'il n'y avait pas de volume maximum car la courbe monte de plus en plus quand x augmente.



Élève 2

Avec le tableur, j'ai calculé le volume pour des valeurs de 0,1 *en* 0,1*. C'est donc pour un carré de* 3 cm *de côté que le volume est maximal et vaut* 513 cm^3.

	A	B	C	D
1	*côté 1*	*côté 2*	*côté 3*	*Volume*
28	2,7	9,6	19,6	508,032
29	2,8	9,4	19,4	510,608
30	2,9	9,2	19,2	512,256
31	3	9	19	513
32	3,1	8,8	18,8	512,864
33	3,2	8,6	18,6	511,872

Élève 3

Je pose c le côté du petit carré.
D'après l'énoncé, je sais que quand $c = 0$ *et quand* $c = 12{,}5$ *le volume vaut* 0 *donc il y a un maximum pour* $c = 6{,}25$ *et je trouve* 195,3125 cm^3.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et en indiquant des aides à apporter pour qu'il puisse corriger ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes conduisant à une modélisation par des fonctions*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



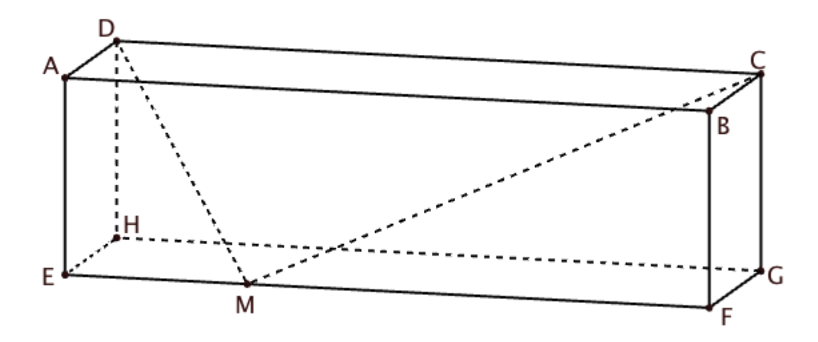
Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 10, AD = AE = 3.

Soit M un point du segment [EF].

1. Existe-t-il des positions de M telles que le triangle DMC soit rectangle en M ?
2. Existe-t-il des positions de M telles que le triangle HMG soit rectangle en M ?



Les réponses de deux élèves de terminale STD2A à la question 1

Élève 1

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dynamique et j'ai trouvé deux positions pour lesquelles DMC est rectangle en M : lorsque EM ≈ 2,4 ou EM ≈ 7,6.

Élève 2

Je vais me placer dans un repère, j'ai choisi $(E\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$.
$\overrightarrow{DM}$ *a pour coordonnées* $(x\,;-1\,;-1)$.
$\overrightarrow{CM}$ *a pour coordonnées* $(x-1\,;-1\,;-1)$.
Je calcule les longueurs DM et CM.
DMC est rectangle en M lorsque $2x^2-2x-95=0$.
Cette équation a une seule solution positive $x \approx 7{,}4$ *donc il existe une seule position de M.*

Le travail à exposer devant le jury

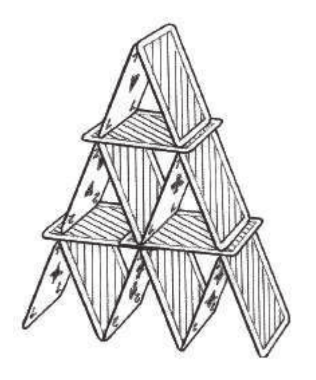
1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STD2A en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie dans l'espace* dont l'un au moins se situe au niveau collège. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : problème à prise d'initiative

L'exercice



Château de cartes à trois étages.

On se propose de construire un château de cartes selon le modèle ci-contre.

1 – Combien de cartes sont utilisées si on construit ainsi dix étages ?

2 – Combien d'étages peut-on construire avec 10 000 cartes, et combien restera-t-il de cartes ?

Les réponses de deux élèves

Élève 1 (collège)

1 - À chaque
l'
j'ai trouv 155 *cartes pour dix*

2 - En utilisant un programme ressemblant, pour 10 000 *cartes, j'ai montr* 81 *étages et qu'il restera* 118 *cartes.*

```
quand [drapeau] est cliqué
mettre [étage] à 1
mettre [cartes] à 2
mettre [total cartes] à 2
répéter 9 fois
    ajouter à [étage] 1
    ajouter à [cartes] 3
    ajouter à [total cartes] (cartes)
```

Élève 2 (lycée)

1 - Je note pour n entier naturel, u_n *le nombre de cartes utilis* *ième étage.*
Comme pour chaque nouvel 3 *cartes par rapport*
que (u_n) *est une suite arithm* 3 *avec* $u_0 = 2$.

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = \dfrac{(2+2+3\times 10)}{2} \times 10 = 170$, *il faut* 170 *cartes pour faire dix*

2 - Je proc *e* $u_0 + u_1 + \ldots + u_n \leqslant 10000$.

$$\frac{(2+2+3\times n)}{2} \times n \leqslant 10000$$

$$3n^2 + 4n - 20000 \leqslant 0.$$

En m'aidant du discriminant, je trouve $n = 80$.

J'ai ainsi utilis $\dfrac{(2+2+3\times n)}{2} \times n = 9760$ *cartes. Il en reste donc* $10000 - 9760 = 240$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les démarches de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *probl* . Vous motiverez vos choix en précisant les compétences qu'ils permettent de développer chez les élèves.

Thème : probabilités

L'exercice

On souhaite savoir si une entreprise exerce une discrimination à l'embauche vis-à-vis du personnel féminin. S'il n'y a pas de discrimination, la proportion de femmes dans cette entreprise doit être représentative de la proportion de femmes dans la population active. On admet que la proportion de femmes dans la population active est 0,5.

1. En utilisant un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, déterminer si on peut affirmer qu'une entreprise comprenant 1 183 femmes sur 2 539 salariés exerce une discrimination à l'égard des femmes.
2. Selon cette méthode, estimer le nombre maximal de femmes en dessous duquel on peut affirmer que l'entreprise exerce une discrimination à l'embauche vis-à-vis du personnel féminin.

Les réponses de deux élèves de seconde à la question 1

Élève 1

Comme l'échantillon est supérieur à 25, on utilise la formule $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

On fait $\left[\dfrac{1\,183}{2\,539}-\dfrac{1}{\sqrt{2\,539}}\,;\dfrac{1\,183}{2\,539}+\dfrac{1}{\sqrt{2\,539}}\right]=[0{,}45\,;0{,}49]$.

Comme 0,5 est supérieur à cet intervalle, l'entreprise exerce une discrimination à l'égard des femmes.

Élève 2

À l'aide d'un tableur, j'ai simulé l'embauche de 2 539 *salariés avec la probabilité* $p=0{,}5$ *que la personne recrutée soit une femme.*
J'ai compté le nombre de femmes et j'obtiens 1 241 *femmes soit une fréquence de* 0,49. *Si je recalcule la feuille alors parfois la fréquence dépasse* 0,5.
Je pense que cela dépend des cas, il faudrait trouver un autre moyen pour savoir.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les réponses de chaque élève en mettant en évidence les compétences mobilisées et les erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *probabilités*, dont l'un au niveau collège. Vous motiverez vos choix en précisant les compétences qu'ils permettent de développer chez les élèves.

Thème : suites

L'exercice

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Les réponses de trois élèves de terminale S

Élève 1

Je considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Je calcule la dérivée de la fonction f *et j'obtiens* $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

La fonction f' *est clairement positive pour toutes les valeurs de* x.
J'en déduis que la fonction f *est croissante et, par conséquent, que la suite* (u_n) *est croissante.*

Élève 2

À l'aide de ma calculatrice, j'ai calculé les premiers termes de la suite.
J'ai obtenu $u_2 = 0{,}71$, $u_3 = 0{,}58$ *et* $u_4 = 0{,}5$.
Je pense donc que la suite (u_n) *est décroissante.*

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \times \sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}$, *je n'arrive pas à conclure.*

Élève 3

J'ai calculé les premiers termes : $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *et* $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

On voit que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier n *non nul,* $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$ *par conséquent* $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

J'en déduis que la suite (u_n) *est décroissante.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – À partir d'une analyse des trois productions d'élèves, précisez une aide à apporter à chacun d'eux pour faire aboutir leur démarche.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *suites*, dont l'un fait intervenir un algorithme. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



Thème : grandeurs et mesures

L'exercice

Sur la route des vacances, Audrey a roulé 1 h30 sur route nationale à une vitesse moyenne de 70 km/h.



Le reste du trajet, effectué sur autoroute à vitesse constante, lui a pris 45 minutes.

À la fin du trajet, le compteur indique que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours était de 90 km/h.

Audrey a-t-elle respecté la limitation de vitesse sur autoroute, qui était de 130 km/h ?

Les réponses de trois élèves de cycle 4

Élève 1

Sur autoroute, Audrey a mis deux fois moins de temps, elle est donc allée deux fois plus vite, ce qui fait 140 km/h.
Elle n'a donc pas respecté la limitation de vitesse.

Élève 2

Sur la route nationale, Audrey a parcouru $70+35=105$ km. *Si elle est allée à vitesse maximale sur l'autoroute, elle a parcouru* $130\times 0{,}45=58{,}5$ km.
En tout cela ferait 163,5 km *en* 1,75 *heures et donc une vitesse supérieure à* 90 km/h.
Audrey a donc respecté la limitation de vitesse.

Élève 3

Pour avoir une vitesse moyenne de 90 km/h, *il faut avoir une vitesse v sur autoroute telle que :*

$$\frac{70+v}{2}=90$$

Donc $70+v=180$, *d'où* $v=110$. *Elle a respecté les limitations de vitesse.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2 – En vous appuyant sur les productions d'élèves, présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Proposez trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : prise d'initiative

L'exercice

Kaprekar est un mathématicien indien contemporain (1905-1986) bien connu pour son habileté en calcul.

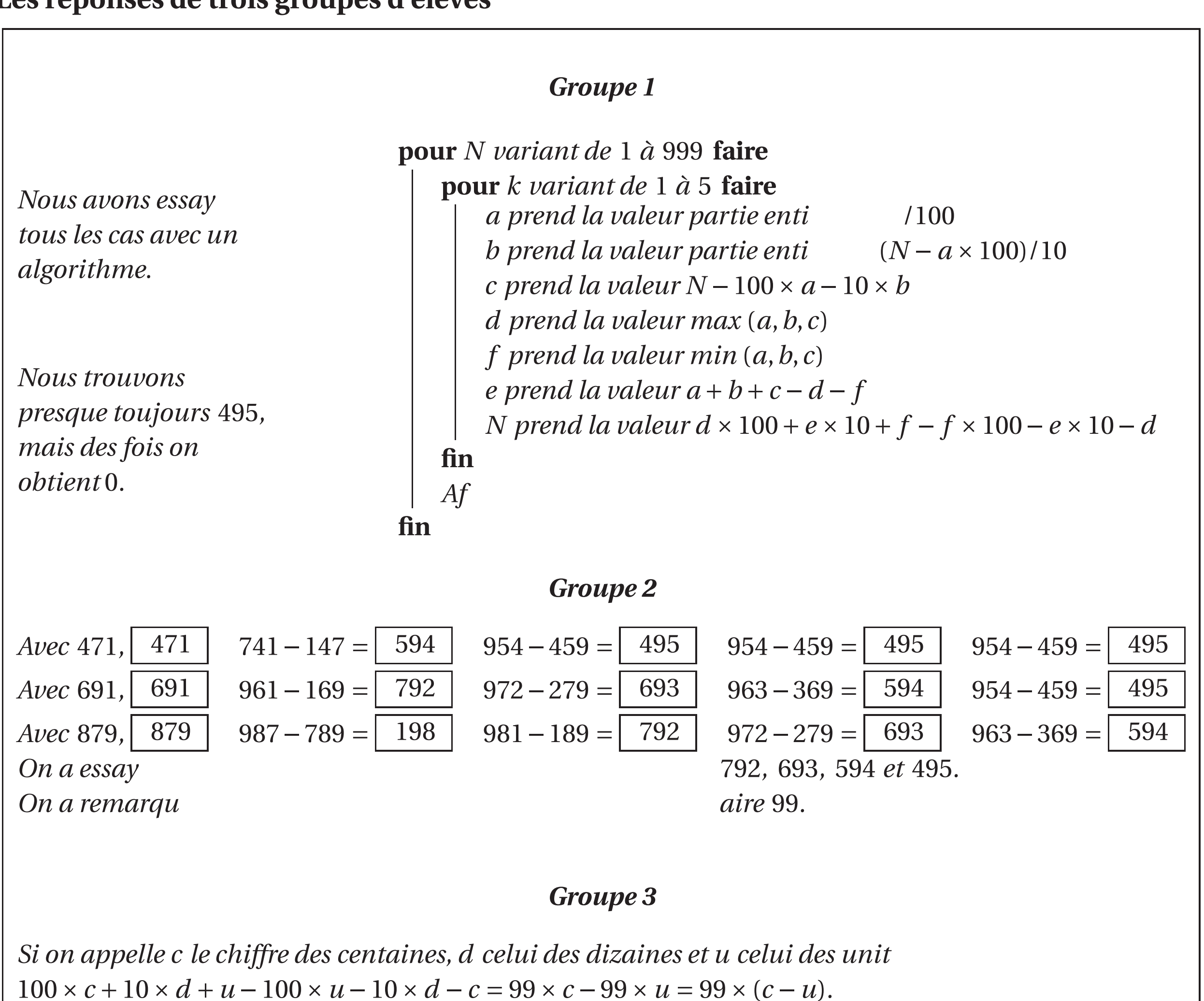
Il aimait proposer le jeu suivant :

« *Pense* *nombre le plus grand que tu peux former avec ces trois chiffres, puis soustrais-lui le nombre le plus petit que tu peux obtenir. Recommence avec le nombre obtenu. Fais cette op* *is sur un papier le r* . »

Qu'en pensez-vous ?

Source TraAM, acad

Les réponses de trois groupes d'élèves



Groupe 1

Nous avons essay tous les cas avec un algorithme.

Nous trouvons presque toujours 495, mais des fois on obtient 0.

pour N *variant de* 1 *à* 999 **faire**
  pour k *variant de* 1 *à* 5 **faire**
    a *prend la valeur partie enti* $/100$
    b *prend la valeur partie enti* $(N - a \times 100)/10$
    c *prend la valeur* $N - 100 \times a - 10 \times b$
    d *prend la valeur max* (a, b, c)
    f *prend la valeur min* (a, b, c)
    e *prend la valeur* $a + b + c - d - f$
    N *prend la valeur* $d \times 100 + e \times 10 + f - f \times 100 - e \times 10 - d$
  fin
  Af
fin

Groupe 2

Avec 471, 471	741 − 147 = 594	954 − 459 = 495	954 − 459 = 495	954 − 459 = 495
Avec 691, 691	961 − 169 = 792	972 − 279 = 693	963 − 369 = 594	954 − 459 = 495
Avec 879, 879	987 − 789 = 198	981 − 189 = 792	972 − 279 = 693	963 − 369 = 594

On a essay 792, 693, 594 *et* 495.
On a remarqu *aire* 99.

Groupe 3

Si on appelle c *le chiffre des centaines,* d *celui des dizaines et* u *celui des unit*
$100 \times c + 10 \times d + u - 100 \times u - 10 \times d - c = 99 \times c - 99 \times u = 99 \times (c - u)$.
Comme c *et* u *sont des chiffres, on ne peut obtenir que* 8 *r*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de chaque groupe en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2 – Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *prise d'initiative*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : prise d'initiative

L'exercice

On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + x + 1$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -3x + p$, où p est un paramètre réel.

Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ admettent des points d'intersection à coordonnées entières ? Si oui, déterminer toutes les valeurs de p qui conviennent.

Les réponses de deux élèves de première scientifique

Élève 1

Avec un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la parabole $\mathscr{P}$ et différentes droites $\mathscr{D}$ en prenant différentes valeurs pour p.
Ensuite, j'ai demandé les points d'intersection.
Je trouve que p peut prendre les valeurs : -3 ; -2 ; 1 ; 6 ; 13 ; $22\ldots$
En fait, pour trouver les p, il faut rajouter les nombres impairs.

Élève 2

On choisit un entier a et on considère le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a.
Ensuite, on cherche la valeur de p pour que la droite $\mathscr{D}$ passe par ce point.
On a alors : $a^2 + a + 1 = -3a + p$ et donc $p = a^2 + 4a + 1$.
Il existe donc une infinité de valeurs de p qui marchent.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et en mentionnant les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.